\documentclass[12pt, oneside]{report}

\usepackage[top=3cm, bottom=3.0cm, left=3.5cm, right=2.0cm]{geometry}

\usepackage[utf8]{vietnam}

\usepackage[numbers]{natbib}

\usepackage{graphicx}

\usepackage{latexsym, amsmath, amsfonts, amscd, amssymb, verbatim, amsxtra,amsthm}

\usepackage{calculator} %tinh toan trong latex

\usepackage{calculus} %tinh toan trong latex

\usepackage{pgf}

\usepackage{scrextend} %thay doi cỡ chữ

\usepackage{polynom} %chia da thuc

\usepackage{imakeidx} %

%\usepackage{makeidx}

\usepackage{indentfirst}

\usepackage{picinpar}

\usepackage{floatflt}

\usepackage{longtable}%

\usepackage{multicol}%

\usepackage{hyperref}

\usepackage{textcase}

\usepackage{titlesec}

\usepackage{cases}

\usepackage{tikz}

\usetikzlibrary{matrix}

\usetikzlibrary{calc,intersections}

\usetikzlibrary{arrows}

%moi them vao

\usepackage{pgf,tikz,pgfplots}

\usepackage{tkz-euclide}

\usepackage{graphicx}

\usepackage{color}

\usepackage{hyperref}

\usepackage[all]{xy}

\usepackage{mathrsfs}

\usepackage{tikz,tkz-tab}

\usepackage{parallel}

\usepackage{array}

\usepackage{xcolor}

\usepackage{verbatim}

\usepackage{tikz-3dplot}

\usepackage{comment}

\usepackage{tikz-cd}

\usepackage{enumerate}

\usepackage{subcaption}

\usepackage{float}

\newcommand\*{\hv}{\hfill\ensuremath{\square}}%thên hv để kết thúc cm

\newcommand{\eq}{\;\begin{equation}\;}

\newcommand{\heq}{\;\end{equation}\;}

\newcommand{\eqn}{\;\begin{eqnarray}\;}

\newcommand{\heqn}{\;\end{eqnarray}\;}

\usepackage[]{algorithm2e}

\usepackage{scrextend}

\usepackage{hyperref}

\usepackage[all]{xy}

\usepackage{longtable}

\newcommand{\chia}{\;\vdots\;}

\newcommand{\kchia}{\not\vdots\;\;}

\newcommand{\R}{\mathbb R}

\newcommand{\N}{\mathbb N}

\newcommand{\C}{\mathbb C}

\newcommand{\Z}{\mathbb Z}

\newcommand{\tp}{\int\limits}

\theoremstyle{definition}

\newtheorem{dinhnghia}{Định nghĩa}[section]

\newcommand{\dn}{\begin{dinhnghia}}

\newcommand{\hdn}{\end{dinhnghia}}

\newtheorem{vidu}[dinhnghia]{Ví dụ}

\newcommand{\vd}{\begin{vidu}}

\newcommand{\hvd}{\end{vidu}}

\newtheorem{nhanxet}[dinhnghia]{Nhận xét}

\newcommand{\nx}{\begin{nhanxet}}

\newcommand{\hnx}{\end{nhanxet}}

\newtheorem{chuy}[dinhnghia]{Chú ý}

\newcommand{\cy}{\begin{chuy}}

\newcommand{\hcy}{\end{chuy}}

\newtheorem{kihieu}[dinhnghia]{Kí hiệu}

\newcommand{\kh}{\begin{kihieu}}

\newcommand{\hkh}{\end{kihieu}}

\theoremstyle{plain}

\newtheorem{theorem}[dinhnghia]{Định lí}

\newcommand{\dl}{\begin{theorem}}

\newcommand{\hdl}{\end{theorem}}

\newtheorem{pro}[dinhnghia]{Mệnh đề}

\newcommand{\md}{\begin{pro}}

\newcommand{\hmd}{\end{pro}}

\newtheorem{lem}[dinhnghia]{Bổ đề}

\newcommand{\bd}{\begin{lem}}

\newcommand{\hbd}{\end{lem}}

\newtheorem{co}[dinhnghia]{Hệ quả}

\newcommand{\hq}{\begin{co}}

\newcommand{\hhq}{\end{co}}

\newtheorem{re}[dinhnghia]{Nhận xét}

\setcounter{tocdepth}{1}

\numberwithin{equation}{chapter}

\setlength{\headsep}{0.2cm}

\pagestyle{plain}

\begin{document} \large

\fontsize{14pt}{14pt}\selectfont

\baselineskip 0.8cm

\begin{titlepage}

\begin{center}

{BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO}\\

{\bf \underline {TRƯỜNG ĐẠI HỌC VINH}}\\

\end{center}

\vspace{2cm}

\begin{center}

\Large \bf ĐẶNG THỊ A

\end{center}

\vspace{2cm}

\begin{center}

{\bf \Large { HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI TIỆM CẬN NGHIỆM TẠI VÔ HẠN}}

\end{center}

\vspace{2cm}

\centerline{\textit{Chuyên ngành}: \textbf{ĐẠI SỐ VÀ LÝ THUYẾT SỐ}}

\centerline {\textbf{Mã số: 846 01 04}}

\vspace\*{1.5cm}

\centerline{\bf LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC}

\vspace\*{1.5cm}

\centerline{\bf Người hướng dẫn khoa học}

\centerline{\bf TS. NGUYỄN B}

\vfill

\centerline{\bf \Large Nghệ An - 2022}

\end{titlepage}

\tableofcontents % Lệnh mục lục

\setcounter{page}{3}

\chapter\*{\Large \bf

LỜI CẢM ƠN}

Tác giả bày ... - thầy giáo hướng dẫn khoa học - đã dành nhiều xxx của luận văn.\\

\indent Tác giả cũng .....\\

\indent Xin gửi lời ....\\

\hspace\*{250pt}\emph{Nghệ An, tháng 6 năm 2022}

\hspace\*{307pt}\textbf{Tác giả}

\vspace{0.5cm}

\hspace\*{290pt}\emph{Đặng Thị A}

\chapter\*{\Large \bf MỞ ĐẦU}

\addcontentsline{toc}{chapter}{\Large \bf {Mở đầu}}

\setcounter{page}{3}\

\medskip

\noindent{\bf 1. Lý do chọn đề tài}

Xét bài toán sau: Tìm điều kiện cần và đủ để hệ sau vô nghiệm

\[\left( P \right)\quad \left\{ \begin{array}{l}

f\left( x \right) = {x^T}Ax + 2{a^T}x + {a\_0} = 0\\

g\left( x \right) = {x^T}Bx + 2{b^T}x + ~{b\_0} = 0,

\end{array} \right.\]

trong đó $f(x), g(x)$ là các đa thức bậc hai.

Chú ý rằng nếu thay hai phương trình của hệ trên bằng các bất phương trình

$f(x)>0, g(x)\leq 0$ thì bài toán được giải quyết năm 1971. Nếu thay một trong hai phương trình trên bằng một bất phương trình thì gần đây bài toán mới được giải quyết một cách triệt để (năm 2016).

Các câu hỏi dạng trên thu hút được khá nhiều nhà toán học tham gia giải quyết, các kết quả quan trọng về câu hỏi trên được Finsler đưa ra và chứng minh vào năm $1937$, Polyak 1998, Beck 2006, Xia Yong 2016. Điều thú vị là cho đến nay bài toán $(P)$, trên vẫn là một câu hỏi mở.

Trong các bài toán dạng trên chúng tôi thấy một trường hợp khá thú vị đó là mặc dù hệ $\{f(x)=0, g(x)\leq 0\}$ vô nghiệm, nhưng có một dãy $\{x\_n\}$ trong $\{x\in\R^n: g(x)\leq 0\}$ để $\lim\limits\_{n\rightarrow \infty}f(x\_n)=0$. Chúng tôi gọi hệ này có "tiệm cận nghiệm tại vô hạn". Bởi tính thú vị của vấn đề này, chúng tôi chọn đề tài:

\begin{center}

\textbf{Hệ phương trình bậc hai tiệm cận nghiệm tại vô hạn}

\end{center}

làm đề tài cho luận văn của mình.

\chapter{Kiến thức chuẩn bị}

\changefontsizes[24pt]{14pt}

\section{Phân tích suy biến (SVD)}

\dl Một ma trận $\mathbf{A}\_{m \times n}$ bất kỳ đều có thể phân tích thành dạng:

\eq

\mathbf{A}\_{m \times n}=\mathbf{U}\_{m \times m} \boldsymbol{\Sigma}\_{m \times n}\left(\mathbf{V}\_{n \times n}\right)^{T}.

\label{5quang}\heq

Trong đó, $\mathbf{U}, \mathbf{V}$ là các ma trận trực giao, $\boldsymbol{\Sigma}$ là ma trận đường chéo (có thể không vuông) với các phần tử trên đường chéo $\sigma\_{1} \geq \sigma\_{2} \geq \cdots \geq \sigma\_{r} \geq 0=0=\cdots=0$ và $r$ là hạng của ma trận $\mathbf{A}$.

\hdl

\nx Lưu ý rằng mặc dù $\Sigma$ không phải ma trận vuông, ta vẫn có thể coi nó là ma trận chéo nếu các thành phần khác không của nó chỉ nằm ở vị trí đường chéo, tức tại các vị trí có chỉ số hàng và chỉ số cột là như nhau.

Số lượng các phần tử khác 0 trong $\Sigma$ chính là rank của ma trận $\mathbf{A}$. \hnx

\vd

Cho $ M =\left[\begin{array}{ccc}

3 & 2 & 2 \\

2 & 3 & -2

\end{array}\right]$, ta có $

M=U \cdot \Sigma \cdot V^{\dagger}

$, trong đó $U=\left[\begin{array}{cc}

\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\

\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}

\end{array}\right]$, $ \Sigma =\left[\begin{array}{ccc}

5 & 0 & 0 \\

0 & 3 & 0

\end{array}\right]$, $V=\left[\begin{array}{ccc}

\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3 \sqrt{2}} & -\frac{2}{3} \\

\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3 \sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\

0 & -\frac{2 \sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3}

\end{array}\right]$.

\hvd

\section{Ma trận giả nghịch đảo}

\dn\label{gianghichdao}

Với $A\in M(m,n)$, ma trận giả nghịch đảo Moore–Penrose (sau đây viết gọn là giả nghịch đảo) của $A$ được định nghĩa là ma trận $A^{+}\in M(n,m)$ thỏa mãn cả bốn tính chất sau:

1. $AA^{+}A=A$;

2. $ A^{+}AA^{+}=A^{+}$;

3. $ (AA^{+})^{T}=AA^{+}$;

4. $(A^{+}A)^{T}=A^{+}A$.

\hdn

\vd

Cho ma trận $A=\left[\begin{array}{lll}1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3\end{array}\right]$, dễ thấy rằng det$(A)=0$ (không tồn tại ma trận nghịch đảo của $A$), tuy nhiên giả nghịch đảo của $A$ là

$$

A^+=\dfrac{1}{6}\left[\begin{array}{ccc}

5 & -4 & 1 \\

5 & -4 & 1 \\

-6 & 6 & 0

\end{array}\right].

$$

\hvd

\dl Với mỗi ma trận $A$ có duy nhất $A^+$ thỏa mãn 4 điều kiện của Định nghĩa \ref{gianghichdao}.\hdl

\section{Ma trận nửa xác định dương và các tính chất liên quan}

+ Ma trận đối xứng $A\in S^n$ được gọi là xác định dương nếu

\eqn \label{ct16}

x^TAx> 0, \forall x\in \mathbb R^n, x\neq 0 .

\heqn

+ Ma trận đối xứng $A\in S^n$ được gọi là nửa xác định dương nếu

\eqn \label{ct17}

x^TAx\geq 0, \forall x\in \mathbb R^n.

\heqn

+ $A$ là ma trận xác định dương kí hiệu $A\succ 0$.

+ $A$ là ma trận nửa xác định dương kí hiệu $A\succeq 0$.

\section{Hệ tiệm cận nghiệm tại vô hạn}

Từ nay ta luôn giả sử có hai hàm $f(x)$ và $g(x)$ có dạng lần lượt là

$$\begin{aligned}

f(x)=x^TAx-2a^Tx+a\_0, \\

g(x)=x^TBx-2b^Tx+b\_0. \end{aligned}$$

\dn Hệ $\{f(x)=t, g(x)\leq 0\}$ được gọi là có tiệm cận nghiệm tại vô hạn nếu hệ này vô nghiệm và tồn tại một dãy $\{x^k\}\_{k=1}^{\infty}$ trong $\{x\in \R^n: g(x)\leq 0\}$ sao cho $\lim\limits\_{k\rightarrow \infty}(f(x^k))=t.$

Cặp hàm $\{f(x), ~g(x)\}$ được gọi là thỏa mãn điều kiện BC nếu tồn tại $\lambda\in \R$ để hệ $\{f(x)=t, g(x)\leq 0\}$ vô nghiệm với mọi $t\leq \lambda$.

\hdn

\vd

Lấy $f(x)=x\_1^2, g(x)=-x\_1x\_2+1$. Dễ thấy hệ $f(x)=x\_1^2=0, g(x)=-x\_1x\_2+1\leq 0$ vô nghiệm, dãy $\{\dfrac{1}{k}, k\}\_{k=1}^{\infty}$ thuộc $\{x\in \R^n: g(x)\leq 0\}$ và $f(\dfrac{1}{k}, k)=\dfrac{1}{k^2}\rightarrow 0$ khi $k\rightarrow\infty.$ Vậy theo định nghĩa trên hệ $\{f(x)=0, g(x)\leq 0\}$ tiệm cận nghiệm tại vô hạn.

\hvd

\chapter{ Hệ tiệm cận nghiệm tại vô hạn}

\section{Phần bù Schur}

Chú ý rằng nếu $M$ là ma trận đối xứng thì tồn tại các ma trận đối xứng $A, C$ và ma trận $B$ sao cho

$$

M=\left(\begin{array}{cc}

A & B \\

B^{\top} & C

\end{array}\right),

$$giả sử det$C\ne 0$ khi đó $A-B C^{-1} B^{\top}$ được gọi là phần bù Schur của $C$.

Ta có đẳng thức sau $$

M=\left(\begin{array}{cc}

A & B \\

B^{\top} & C

\end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc}

I & B C^{-1} \\

0 & I

\end{array}\right)\left(\begin{array}{cc}

A-B C^{-1} B^{\top} & 0 \\

0 & C

\end{array}\right)\left(\begin{array}{cc}

I & B C^{-1} \\

0 & I

\end{array}\right)^{\top},

$$

\section{Hệ tiệm cận nghiệm tại vô hạn}

\chapter\*{\Large \bf KẾT LUẬN}

Với mục tiêu đi sâu nghiên cứu, tìm hiểu về điều kiện để hệ phương trình bậc hai nhiều biến tiệm cận nghiệm tại vô hạn, luận văn giới thiệu ba định lý \\

\indent 1. Trình bày khái niệm và một số tính chất của Phần bù Schur . \\

\indent 2. Trình bày chi tiết một số kết quả có liên quan đến ma trận bút chì và SD.\\

\indent 3. Trình bày hệ tiệm cận nghiệm tại vô hạn.

\begin{thebibliography}{999}

% \thispagestyle{empty}

\addcontentsline{toc}{chapter}{\large \bf {Tài liệu tham khảo}}

\medskip

\leftline{\Large{\textbf{Tiếng Việt}}}

\medskip

\bibitem{monghy} Nguyễn Mộng Hy (2017), {\it Hình học cao cấp}, Nhà xuất bản Giáo dục

\bibitem{hung} Nguyễn Hữu Việt Hưng (2019) {\it Đại số tuyến tính}, Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội .

\medskip

\leftline{\Large{\textbf{Tiếng Anh}}}

\medskip

\bibitem{xia1} R.I. Becker (1980) \textit{ Necessary and suﬃcient conditions for the simultaneous diagonability of two quadratic forms.} Linear Algebra and its Applications, 30 129--139.

\bibitem{xia15} J.J. Mor´e (1993) \textit{ Generalizations Of The Trust Region Problem.} Optimization Methods and Software, 2, 189--209.

\bibitem{xia25} Y. Ye and S. Zhang (2003) \textit{New results on quadratic minimization.} SIAM J. Optim., 14(1), 245--267.

\bibitem{RG} Pólik, I., Terlaky, T.\emph{A survey of the S-lemma}. SIAM Rev. 49(3), 371–418 (2007)

\bibitem {SL} Stephen Boyd, Lieven Vandenberghe. \emph{ Introduction to Applied Linear Algebra - Vectors, Matrices, and Least Squares}. Cambridge University Press (2018).

\end{thebibliography}

\end{document}